Eichfeldtheorie zur U3-invarianten Pais-Gleichung

Fritz Bopp

Z. Naturforsch. **35a**, 355–357 (1980);
eingegangen am 8. Februar 1980

Gauge Field Theory of an U3-invariant Pais Equation

We are looking for the gauge field theory which corresponds to the U3-invariance of the recently obtained free particle Dirac equation generalized according to an idea of Pais.

Eichfeldtheorien leiten sich aus den Symmetrieeigenschaften von Wellengleichungen für kräftefreie 1-Teilchen-Systeme ab. Hier fragen wir speziell nach den Eichfeldern, die zur U3-Invarianz der in Anlehnung an Pais [1] verallgemeinerten Dirac-Gleichung gehören, welche Verf. [2] kürzlich untersucht hat. Mit $\hbar$, c und m_0 als Einheiten lautet die Wellengleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a})\,\psi(x,\boldsymbol{Q}) = 0\,;$$
$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{Q} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{Q}}\right), \quad \boldsymbol{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{Q} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{Q}}\right);$$
$$\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)\,. \tag{1}$$

Die unitären Transformationen im $\boldsymbol{Q}$-Raum ergeben sich aus

$$\psi \to \psi' = e^{i\eta_0}\psi\,, \quad \eta_0 = \boldsymbol{a}^\dagger \eta\, \boldsymbol{a}\,, \quad \eta^\dagger = \eta\,. \tag{2}$$

Wegen

$$\boldsymbol{a}' = e^{-i\eta_0}\boldsymbol{a}\,e^{+i\eta_0} = S\boldsymbol{a}\,, \quad S = e^{-i\eta} \tag{3}$$

ist $\boldsymbol{a}'^\dagger \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}^\dagger S^\dagger S \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}$ unitärinvariant. Der hohen Symmetrie entsprechen zahlreiche Erhaltungssätze. Seien ψ und ψ' zwei Lösungen von (1), so gilt die übliche Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu \psi') = 0\,, \quad \overline{\psi} = \psi^\dagger \varrho_3 i\,.$$

Darin kann ψ' mit beliebigem η gemäß (2) aus ψ abgeleitet werden. Es genügt die infinitesimalen Transformationen zu betrachten. Damit erhält man neun Kontinuitätsgleichungen:

$$\partial_\mu(\overline{\psi}\boldsymbol{a}^\dagger \lambda_\alpha \boldsymbol{a}\gamma^\mu \psi) = 0\,, \quad \alpha \in (1,2,\ldots,9)\,, \tag{4}$$

in denen λ_α neun Basismatrizen sind, die wir wie folgt wählen:

$$\lambda_\alpha = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 000 & 000 & 010 & 000 & 001 & 000 & 100 & 000 & 000 \\ 001 & 000 & 000 & 000 & 000 & 100 & 000 & 010 & 000 \\ 000 & 100 & 000 & 010 & 000 & 000 & 000 & 000 & 001 \end{array}\right|,$$
$$\alpha \in (1,2,\ldots,9)\,. \tag{5}$$

Wegen der Hermitezität von η gilt

$$\eta = \chi^\alpha \lambda_\alpha : \chi^4 = \chi^{1*},\ \chi^5 = \chi^{2*},\ \chi^6 = \chi^{3*},$$
$$\chi^{7*} = \chi^7,\ \chi^{8*} = \chi^8,\ \chi^{9*} = \chi^9\,. \tag{6}$$

Die Wellengleichung ist invariant, wenn alle χ^α konstant sind. Doch gilt diese Symmetrie für ein einzelnes Teilchen nur, wenn man von Umwelteinflüssen absehen kann, wenn man also so tun darf, als wäre das Teilchen allein auf der Welt. Durch die Umwelteinflüsse geht die globale Konstanz der χ^α verloren. Im Falle x-abhängiger $\chi^\alpha(x)$ und $\eta(x) = \lambda_\alpha \chi^\alpha(x)$ ergibt sich

$$\partial_\mu \to e^{-i\eta_0}\partial_\mu e^{+i\eta_0} = \partial_\mu$$
$$+ \frac{(-i)}{1!}[\eta_0, \partial_\mu] + \frac{(-i)^2}{2!}[\eta_0,[\eta_0,\delta_\mu]] + \cdots.$$

Darin ist

$$[\eta_0, \partial_\mu] = -\,\boldsymbol{a}^\dagger \eta_\mu \boldsymbol{a}\,, \quad \eta_\mu := \delta_\mu \eta\,,$$

so daß wir obige Transformation wie folgt schreiben können:

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - \boldsymbol{a}^\dagger \xi_\mu \boldsymbol{a}\,,$$
$$\xi_\mu = \frac{(-i)}{1!}\eta_\mu + \frac{(-i)^2}{2!}[\eta, \eta_\mu]$$
$$+ \frac{(-i)^3}{3!}[\eta,[\eta,\eta_\mu]] + \cdots. \tag{7}$$

Bei Einschluß der Umwelteinflüsse wird also die Symmetrie der Gleichung für ein Teilchen gestört.

Wegen des hierarchischen Aufbaus der Welt, nach dem man immer wieder Teile derselben als isoliert von der Umwelt betrachten kann, nach der also Teile immer wieder die volle Symmetrie haben, müssen wir die 1-Teilchen-Wellengleichung durch Terme ergänzen, die sich gegenläufig zu ∂_μ in (7) transformieren. Das führt zur Einführung von Eichfeldern, die nach (7) in $\boldsymbol{a}^\dagger$, $\boldsymbol{a}$ bilinear sein und sich wegen ∂_μ und ∂_μ in (7) wie ein kovarianter Vektor verhalten müssen. Darum machen wir den Ansatz

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \boldsymbol{a}^\dagger \Phi_\mu(x)\,\boldsymbol{a}\,, \tag{8}$$

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. F. Bopp, Sulzbacherstraße 3, D-8000 München 40.

0340-4811 / 80 / 0300-0355 $ 01.00/0. — Please order a reprint rather than making your own copy.

der bei folgender Eichtransformation invariant ist:

$$\psi \to e^{i \boldsymbol{a}^\dagger \eta \boldsymbol{a}}, \quad \partial_\mu \to \partial_\mu - \boldsymbol{a}^\dagger \xi_\mu \boldsymbol{a}, \qquad \Phi_\mu \to \Phi_\mu + \xi_\mu . \tag{9}$$

Wegen der Eichvariabilität von Φ_μ sind diese Felder wie die Potentiale in der Elektrodynamik nicht unmittelbar meßbar. Wir müssen darum zu den Eichinvarianten Feldern

$$F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \boldsymbol{a}^\dagger F_{\mu\nu} \boldsymbol{a} \tag{10}$$

übergehen. Nach (9) folgt daraus

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu + [\Phi_\mu, \Phi_\nu]. \tag{11}$$

Mit dem Ansatz

$$\Phi_\mu(x) = \Phi_\mu{}^\alpha(x)\, \lambda_\alpha \tag{12}$$

erhält man daraus

$$F^\gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu{}^\gamma - \partial_\nu \Phi_\mu{}^\gamma + C^\gamma_{\alpha\beta} \Phi_\mu{}^\alpha \Phi_\nu{}^\beta . \tag{13}$$

Darin sind $C^\gamma_{\alpha\beta}$ die durch

$$[\lambda_\alpha, \lambda_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta}\, \lambda_\gamma \tag{14}$$

definierten, auf die Basismatrizen (5) bezogenen Strukturkonstanten der Gruppe U3. Wegen $\Phi^\dagger_\mu = \Phi_\mu$ haben die Φ^α_μ dieselben Reellitätseigenschaften wie χ^α in (6). Die Strukturkonstanten kann man aus folgender Kommutatortafel entnehmen:

$\lambda_\beta =$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
$\lambda_\alpha = \lambda_1$	0	λ_6	$-\lambda_5$	$\lambda_8 - \lambda_9$	0	0	0	$-\lambda_1$	λ_1
λ_2	$-\lambda_6$	0	λ_4	0	$\lambda_9 - \lambda_7$	0	λ_2	0	$-\lambda_2$
λ_3	λ_5	$-\lambda_4$	0	0	0	$\lambda_7 - \lambda_8$	$-\lambda_3$	λ_3	0
λ_4	$\lambda_9 - \lambda_8$	0	0	0	$-\lambda_3$	λ_2	0	λ_4	$-\lambda_4$
λ_5	0	$\lambda_7 - \lambda_9$	0	λ_3	0	$-\lambda_1$	$-\lambda_5$	0	λ_5
λ_6	0	0	$\lambda_8 - \lambda_9$	$-\lambda_2$	λ_1	0	λ_6	$-\lambda_6$	0
λ_7	0	$-\lambda_2$	λ_3	0	λ_5	$-\lambda_6$	0	0	0
λ_8	λ_1	0	$-\lambda_3$	$-\lambda_4$	0	λ_6	0	0	0
λ_9	$-\lambda_1$	λ_2	0	λ_4	$-\lambda_5$	0	0	0	0

Nach Einführung der Eichfelder lautet die Wellengleichung

$$\{\gamma^\mu(\partial_\mu + \boldsymbol{a}^\dagger \Phi_\mu(x)\, \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}\}\, \psi(x, \boldsymbol{Q}) = 0 . \tag{15}$$

Seien $\overleftarrow{\partial}_\mu$ nach links wirkende Ableitungen, so lautet die adjungierte Gleichung

$$\overline{\psi}(x, \boldsymbol{Q})\, \{\gamma^\mu(-\overleftarrow{\partial}_\mu + \boldsymbol{a}^\dagger \Phi_\mu(x)\, \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}\} = 0 .$$

Daraus erhält man offensichtlich dieselben Kontinuitätsgleichungen wie oben und dieselben Viererstromdichten

$$s_\alpha{}^\mu = \overline{\psi}\, \boldsymbol{a}^\dagger \lambda_\alpha \boldsymbol{a}\, \gamma^\mu \psi . \tag{16}$$

Während wir bisher wie bei der Eichtheorie der Elektrodynamik vorgehen konnten, stehen wir bei der Ableitung der Quellengleichung vor einer neuartigen Aufgabe. Denn die Stromdichten können als Zahlenfunktionen nicht unmittelbar mit den Operatoren $\mathring{F}_{\mu\nu}$ konfrontiert werden. Man muß vielmehr zu

$$\overline{\psi}\, \mathring{F}_{\mu\nu}\, \psi = \overline{\psi}\, \boldsymbol{a}^\dagger F_{\mu\nu}\, \boldsymbol{a}\, \psi = F^\alpha_{\mu\nu}\, \overline{\psi}\, \boldsymbol{a}^\dagger \lambda_\alpha \boldsymbol{a}\, \psi$$

übergehen.

Aber auch damit kommen wir noch nicht zum Ziel. Unterwerfen wir nämlich die Basismatrizen einer linearen Transformation, so muß sich $F^\alpha_{\mu\nu}$ wie $\Phi_\mu{}^\alpha$ kontragredient zu λ_α transformieren. Obiger Ausdruck ist also invariant, während sich $s_\alpha{}^\mu$ kogredient zu λ_α transformiert. Dieser Schwierigkeit kann man nur dadurch begegnen, daß man die Strukturkonstanten $C^\gamma_{\alpha\beta}$ einschiebt, die im Parameterraum der Gruppe einen einfach kontravarianten und zweifach kovarianten Tensor bilden, der außerdem in α, β schiefsymmetrisch ist. So erhält man schließlich folgende Quellengleichungen:

$$\delta_\nu(\overline{\psi}\, C^\gamma_{\alpha\beta}\, F^{\beta,\mu\nu}\, \boldsymbol{a}^\dagger \lambda_\gamma \boldsymbol{a}\, \psi) = \beta\, \overline{\psi}\, \gamma^\mu \boldsymbol{a}^\dagger \lambda_\alpha \boldsymbol{a}\, \psi . \tag{17}$$

Sie sind klarerweise mit der Kontinuitätsgleichung im Einklang, weil der Tensor $F^{\beta,\mu\nu}$ in μ, ν schiefsymmetrisch ist. Die Kopplungskonstante β entspricht $4\pi\alpha$ in der Elektrodynamik. Einstweilen ist jedoch nicht einmal ihr Vorzeichen bekannt. Wie in der Elektrodynamik und Allgemeinen Relativitätstheorie besteht Superponierbarkeit der Quellen. Ebenso bleibt die Eigenschaft erhalten, daß auf der linken Seite keine höheren als zweite Ableitungen der Potentiale vorkommen, so daß es zwischen den Quellen und Feldern keine intermediären Mechanismen gibt. Auch ist es nicht möglich, den Tensor $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ im Parameterraum durch einen andern zu ersetzen, ohne ad-hoc-Strukturen einzuführen, die nicht von vorneherein im Spiele sind. Denn Produkte des Tensors C wie $C \times C$, $C \times C \times C$ usw. ergeben auch nach Verjüngungen keine weiteren Tensoren vom Typus C. Unter den Bedingungen, die Eichtheorien gewöhnlich erfüllen, sind also die obigen Quellengleichungen eindeutig bestimmt.

[1] A. Pais, Physica **19**, 869 (1953).

Man beachte, daß die Transformation $\bar{\psi}\boldsymbol{a}^{\dagger}\,\boldsymbol{a}\,\psi$, die zur SU3 hinzukommt, nicht mit der Phasentransformation identisch ist, welche zur Elektrodynamik führt. Zwar reduziert sich innerhalb einer Darstellung (m, n) diese Transformation auf eine der Phasen. Doch sind die Phasen bei verschiedenen Darstellungen ganzzahlige Vielfache einer kleinsten.

Wir begnügen uns hier mit der obigen Ableitung der Eichtheorie. Die Integration der Gln. (15) und (17) wird nicht einfach sein, so daß sich Detailrechnungen vor der Quantisierung kaum empfehlen.

[2] F. Bopp, Z. Naturforsch. **35a** 252 (1980). Ergänzung in S.B. math.-naturw. Kl. Bay. Akad. Wiss. 1980.